ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MAI THỊ LIÊN

ĐA THỨC VI PHÂN CÁC HÀM PHÂN HÌNH VÀ VẤN ĐỀ CHIA SẺ GIÁ TRỊ

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: GS.TSKH.HÀ HUY KHOÁI

THÁI NGUYÊN - 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các kết quả nghiên cứu trong luận văn là trung thực và chưa được công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Học viên

Mai Thị Liên

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết đa thức vi phân các hàm phân hình và vấn đề chia sẻ giá trị là một trong những hướng nghiên cứu thu hút được sự quan tâm rộng rãi của các nhà toán học trên thế giới. Đề tài luận văn thuộc hướng nghiên cứu nói trên, với mục đích trình bày một số kết quả gần đây của lý thuyết đa thức vi phân các hàm phân hình.

Luận văn gồm phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 "*Cở sở lý thuyết của Nevanlinna*" được dành để trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản của Lý thuyết Nevanlinna, cần thiết cho việc giới thiệu các kết quả ở chương sau.

Chương 2 "*Quan hệ của cặp hàm nguyên và hàm phân hình khi đa thức vi phân của chúng chia sẻ một giá trị*" là phần chính của luận văn. Ở đây, chúng tôi giới thiệu (với chứng minh chi tiết) một kết quả gần đây của J. Grahl and Sh. Nevo (trong bài báo: *Differential polynomials and shared values,* Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica Volumen 36, 2011, 47-70).

Luận văn được viết dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TSKH Hà Huy Khoái. Thầy không chỉ tận tình hướng dẫn mà còn thông cảm, động viên tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn. Nhân dịp này em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới Thầy!.

Đồng thời, em cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong hội đồng bảo vệ luận văn thạc sỹ đã tạo điều kiện thuận lợi để em vững tin hơn trong việc chuẩn bị bảo vệ luận văn của mình.

Em xin chân thành cảm ơn Đại học Thái Nguyên, Đại học Sư phạm, Khoa sau Đại học Sư phạm, các thầy cô giáo khoa Toán và gia đình đã tạo điều kiện tốt nhất cho em trong thời gian học tập cũng như nghiên cứu và hoàn thành luận văn. Cuối cùng, em xin cảm ơn các anh, chị, các bạn học viên lớp

cao học Toán giải tích - k23b Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã giúp đỡ, chia sẻ kinh nghiệm cho em trong suốt thời gian qua.

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp, các bạn học viên để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Học viên

Mai Thị Liên

Chương 1

CƠ SỞ LÝ THUYẾT CỦA NEVANLINNA

Công cụ sử dụng chủ yếu trong luận văn này là Lý thuyết phân bố giá trị các hàm phân hình, hay còn gọi là Lý thuyết Nevanlinna. Kết quả cơ bản của lý thuyết Nevanlinna là hai Định lý cơ bản và Quan hệ số khuyết.

Chương này có mục tiêu trình bày những kết quả cơ bản đó cùng với những hệ quả cần thiết để trình bày phần tiếp theo.

1.1 Các hàm đặc trưng Nevalinnna và Công thức Poison - Jensen

1.1.1. Công thức Poison - Jensen

Giả sử $f(z)$ *là hàm phân hình trong hình tròn* $\{|z| \le R\}, 0 < R < \infty$*, có các không điểm* a_μ $(\mu = 1, 2, .., M)$*; các cực điểm* $b_v (v = 1, 2, ..., N)$ *trong hình tròn đó (mỗi không điểm hoặc cực điểm được tính một lần số bội của nó).*

Khi đó, nếu $z = re^{i\theta}; (0 \le r \le R), f(z) \ne 0, \infty$*; ta có*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\mathrm{Re}^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi + \sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \overline{a_\mu} z}\right| - \sum_{v=1}^{N} \log\left|\frac{R(z - b_v)}{R^2 - \overline{b_v} z}\right|$$

1.1.2. Các kí hiệu

$N(r, f) = \sum \log \frac{r}{|b|}$ được gọi là hàm đếm, trong đó b là cực điểm của f trong $|z| \le r$ tính cả bội,

$m(r, a) = m\left(r, \frac{1}{f - a}\right),$

$N(r, a) = N\left(r, \frac{1}{f - a}\right),$

$m(r, \infty) = m(r, f),$

$N(r, \infty) = N(r, f).$

1.1.3. Các hàm đặc trưng Nevalinnna

Định nghĩa1.1 . $A(K)=A_\infty(K)$ được gọi là *tập các hàm nguyên* trên K và $A_r(K)=\{f(z)/\rho\le r\}$**(** bán kính hội tụ $\rho\le r$).

Định nghĩa 1.2. Giả sử $f\in A_{(p}(K), 0<\rho\le\infty$ và $f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n$, $(m\ge 0, am\ne 0)$, $a\in K$. Ta định nghĩa

+ $n\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right):=\{z\in K[0;r]: f(z)-a=0\}$ là *hàm đếm được số không điểm (kể cả bội)* của $f-a$ trong đĩa $K[0;r]$.

+ $\overline{n}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ là *hàm đếm số không điểm phân biệt* của $f-a$ trong đĩa $K[0;r]$.

+ Với $0<\rho_0<\rho$ hàm $N\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right):=\displaystyle\int_{\rho_0}^{r}\frac{n\left(t,\frac{1}{f-a}\right)}{t}dt$, $\rho_0<r<\rho$ được gọi là *hàm giá trị* của $f-a$ trên đĩa $K[0;r]$.

Định nghĩa 1.3. Với $a\in K\cup\{\infty\}$ ta định nghĩa

+ Hàm đếm được số 0- điểm (kể cả bội) của $f-a$ trong đĩa $K[0;r]$ được xác định bởi

$$n\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\begin{cases} n(r,f)=n\left(r,\dfrac{1}{f_0}\right), & a=\infty \\ n\left(r,\dfrac{1}{f_1-af_0}\right), & a\ne\infty \end{cases}$$

+ Hàm giá trị của $f-a$ trên đĩa $K[0;r]$ được xác định bởi

$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\begin{cases} N(r,f)=N\left(r,\dfrac{1}{f_0}\right), & a=\infty \\ N\left(r,\dfrac{1}{f_1-af_0}\right), & a\ne\infty \end{cases}$$

Định nghĩa1.4. Giả sử $f\in M_{(p}(K)$ với $0\le\rho$ ta định nghĩa

+ Hàm xấp xỉ của hàm f trên đĩa $K[0;r]$ được xác định bởi

$$m(r,f) = \log^+ \mu(r,f) = max\{0, \log \mu(r,f)\}.$$

+ Hàm đặc trưng: $T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)$.

Chú ý 1.1. + $\log \mu(r,f) = \log^+ \mu(r,f) - \log^+ \dfrac{1}{\mu(r,f)}$

$$= m(r,f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Công thức Jensen có thể viết thông qua hàm đặc trưng như sau

$T\left(r,\dfrac{1}{f}\right) = T(r,f) - \log \mu(\rho_0, f)$ hay $T\left(r,\dfrac{1}{f}\right) = T(r,f) + o(1)$.

+ $M_{(\rho}(K) = M(K(0;\rho))$.

Định nghĩa1.5. Giả sử x là số thực dương, kí hiệu $\log^+ x = max\{0, \log x\}$.

Ta có: $\log x = \log^+ x - \log^+ \dfrac{1}{x}$, vì $x > 1 : \log x > 0 \Rightarrow \log^+ x = \log x$, $\log \dfrac{1}{x} < 0 \Rightarrow \log^+ \dfrac{1}{x} = 0$,

$0 < x \le 1 : \log \mathrm{x} \le 0 \Rightarrow \log^+ x = 0$, $\log \dfrac{1}{x} \ge 0 \Rightarrow \log^+ \dfrac{1}{x} = \log \dfrac{1}{x} = -\log \mathrm{x}$.

1.2. Một số kết quả cơ bản của lý thuyết Nevanlinna.

Định lý 1.2.1. (Định lý cơ bản thứ nhất) *Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trên $K(0,\rho)$. Khi đó, với mọi $a \in K$, ta có*

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + o(1),\ (r \to \rho).$$

Nhận xét 1.1. Định lý cơ bản thứ nhất cho ta thấy hàm phân hình nhập mọi giá trị a một số lần như nhau.

Định lý 1.2.2. (Định lý cơ bản thứ hai) *Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trên $K(0,\rho)$ và $a_1, \ldots.., a_q$ là các điểm phân biệt thuộc K. Định nghĩa $\delta = \min\{1, |a_i - a_j|\}$, $A = max\{1, |a_i|\}$. Khi đó với $0 < r < \rho$ ta có*

$$(q-1)T(r,f) \le \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N(r,f) + N(r,f') - N\left(r, \frac{1}{f}\right) - \log r + S_f$$

$$\leq \overline{N}(r,f)+\sum_{j=1}^{q}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)-\log r+S_f \text{ , với}$$

$$S_f=\sum_{j=1}^{q}\log\mu\left(\rho_0, f-a_j\right)-\log\mu\left(\rho_0, f'\right)+(q-1)\log\frac{A}{\delta}.$$

Định nghĩa 1.6. Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình khác hằng số trên . Ta định nghĩa $S(r,f)$ là một đại lượng xác định thỏa mãn $S(r,f)=o\left(T(r,f)\right)$ khi $r\to\infty$; có thể trừ đi một tập E của r có độ đo hữu hạn. Giả sử $a(z), a_0(z), a_1(z),\ldots$ là các hàm nhỏ của f, tức là các hàm thỏa mãn

$$T\left(r,a(z)\right)=S(r,f) \text{ khi } r\to\infty.$$

Định lý 1.2.3. (Định lý Milloux) *Cho l là một số nguyên, f là hàm phân hình khác hằng số trên và $\psi(z)=\sum_{\nu=0}^{l}a_\nu(z)f^{\nu}(z)$.*

Khi đó

$$m\left(r,\frac{\mathrm{W}(z)}{f(z)}\right)=S(r,f)$$

(1.1)

và

$$T(r,\psi)\leq(l+1)T(r,f)+S(r,f). \qquad (1.2)$$

Chứng minh. Xét trường hợp $\psi(z)=f^{(l)}(z)$, chứng minh bằng phép quy nạp với l. Nếu $\psi(z)=f'$ thì $m\left(r,\frac{f'}{f}\right)=S(r,f)$. Giả sử , với l nào đó.

Khi đó $m\left(r,f^{(l)}\right)\leq m\left(r,\frac{f^{l}}{f}\right)+m(r,f)=m(r,f)+S(r,f).$ (*)

Nếu $f(z)$ có cực điểm tại z_0 cấp k thì $f^{(l)}(z)$ có cực điểm tại z_0 cấp $k+l$ và $k+l\leq(l+1)k$. Do đó $N\left(r,f^{(l)}\right)\leq(l+1)N(r,f)$. (**)

Cộng các bất đẳng thức (*) (**) ta được

$$T\left(r,f^{(l)}\right)=m\left(r,f^{(l)}\right)+N\left(r,f^{(l)}\right)\leq m(r,f)+(l+1)N(r,f)+S(r,f)$$

$$\leq (l+1)T(r,f)+S(r,f).$$

Như vậy trong trường hợp này (1.2) được chứng minh.

Ta kết luận rằng $m\left(r,\dfrac{f^{(l-1)}}{f^{(l)}}\right)=S\left(r,f^{(l)}\right)=o\left(T\left(r,f^{(l)}\right)\right)=o\left(T(r,f)\right)$, khi $r\to\infty$, trừ một tập E của r có độ đo hữu hạn.

Khi đó

$$m\left(r,\frac{f^{(l-1)}}{f}\right)\leq m\left(r,\frac{f^{(l-1)}}{f^{(l)}}\right)+m\left(r,\frac{f^{(l)}}{f}\right)=S(r,f).$$

Vậy định lý được chứng minh trong trường hợp $\psi(z)=f^{(l)}(z)$. Trường hợp tổng quát ta chú ý rằng

$$m\left(r,\frac{\psi(z)}{f(z)}\right)\leq\sum_{v=0}^{l}m\left(r,a(v)\,f^{(v)}(z)\right)+\log(l+1)\leq\sum_{v=0}^{l}\left[m\left(r,a(v)+m\left(r,\frac{f^{(v)}(z)}{f}\right)\right)\right]+\log(l+1)$$

$$\leq\sum_{v=0}^{l}S(r,f)+o(1)=S(r,f).$$

Vậy (1.1) được chứng minh.

Hơn nữa ta có $m(r,\psi)\leq m\left(r,\dfrac{\psi}{f}\right)+m(r,f)\leq m(r,f)+S(r,f)$.

Nếu $f(z)$ có cực điểm cấp p tại z_0 và $a_v(z)$ có cực điểm cấp không quá q tại z_0 thì $\psi(z)$ có cực điểm tai z_0 cấp không vượt quá $p+l+q$ và $p+l+q\leq(l+1)p+q$. Khi đó

$$N(r,\psi)\leq(l+1)N(r,f)+N(r,f)+\sum_{v=0}^{l}N\left(r,a_v(z)\right)\leq(l+1)N(r,f)+S(r,f).$$

Vậy $T(r,\psi)=m(r,\psi)+N(r,\psi)\leq m(r,f)+S(r,f)+(l+1)N(r,f)+S(r,f)$

$$\leq(l+1)T(r,f)+S(r,f).$$

Vậy định lý được chứng minh.

Định nghĩa 1.7. Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, $a\in\overline{\mathbb{C}}$, đặt